スカイダイビングの際のダイバーの落下速度

2006 年 9 月 3 日

スカイダイビングをするダイバーの落下速度 $v(t)$ は、空気抵抗を受けるので、自由落下で求まる速度とは異なることになる。例えば、この落下速度が次の微分方程式で与えられるものとする。

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 9.8 - 2.1v(t)^{1.1} \tag{1}$$

これを解析的に解くのは困難であるから、Euler 法を使って、微分方程式の近似解 (数値解) を求めることにする。

一般に 1 階微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x, y) \tag{2}$$

の解 $y = f(x)$ を、初期条件 $(x_0, f(x_0))$ の下で解く場合、(2) 式が、積分可能であれば、厳密解 $y = f(x)$ は簡単に得られる。ここでは、(2) 式が、積分不可能な場合の関数 $f(x)$ を近似的に求める方法として Euler 法という簡単な方法があるので、これを解説し、先にあげたダイバーの落下を考えることにする。

Euler 法というのは、次のような方法である。

$x_0 + \Delta x$ に於ける y の値は、$f(x_0 + \Delta x)$ である。しかし、関数 $y = f(x)$ が求められない以上、この値を決めることはできない。そこで、$(x_0, f(x_0))$ に於ける $f(x)$ への接線を引くと、接線の傾き $f'(x_0)$ は

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{3}$$

となるので、$f(x_0 + \Delta x)$ の代わりに、$f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0)$ をもってその近似値とするのである。即ち、

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) \tag{4}$$

を得る。ここで、$x_1 = x_0 + \Delta x$ と記述し直すと、上式は

$$f(x_1) \approx f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0)$$

と記述でき、$x_2 = x_1 + \Delta x$ の近似値も同様に

$$f(x_2) \approx f(x_1) + \Delta x \cdot f'(x_1)$$

となる。従って、結局

$$f(x_{k+1}) \approx f(x_k) + \Delta x \cdot f'(x_k) \tag{5}$$

を、$k = 0$ より始めて、Δx を十分に小さく取って、次々に求めていけば、(2) 式の近似解 (近似値) が次々に求まることになる。これが Euler 法である。

それでは、この Euler 法により最初にあげたスカイダイビングのダイバーの落下速度をシミュレートすることにする。先ず、初速度を $v_0 = 0.0$ m/s とし、$\Delta t = 0.01$ s とし、$t = 0 \sim 2$ s の間のダイバーの落下速度を近似計算することにする。このシミュレートを行うため数式処理システム Maple で簡単なプログラムを作成した。それが、次の手続きである。

```
> Df:=t− >9.8-2.1*v(t)^1.1;
> t[0]:=0.0;
> v(t[0]):=0.0;
> dt:=0.01;
> for i from 0 to 199 do
>   t[i+1]:=t[i]+dt;
```

```
> v(t[i+1]):=v(t[i])+dt*Df(t[i]);
> od:
> data:=[seq([t[i],v(t[i])], i=0..200)]:
> plot(data,axesfont=[TIMES,ROMAN,12],labelfont=[TIMES,ROMAN,14],labels=["[sec]","[m/s]"]);
```

以上の Maple プログラムの実行結果のグラフは次の通りになる。

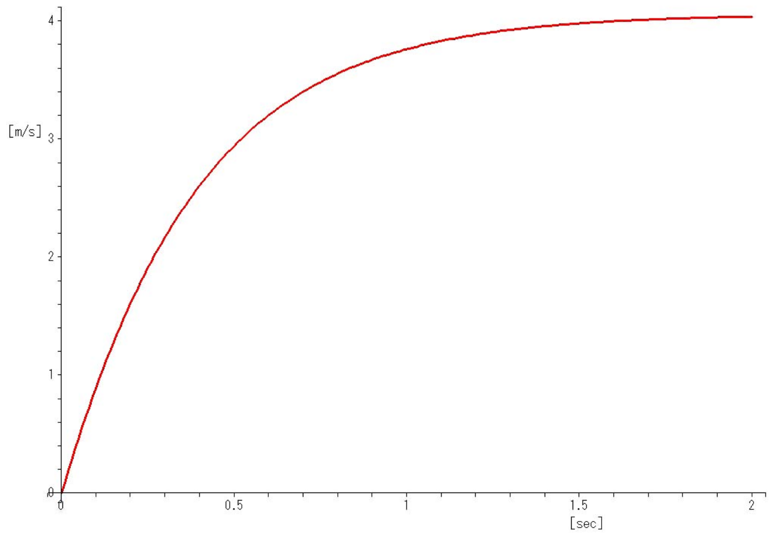

Fig. 1: ダイバーの落下速度の変化

このシミュレーションでは、2.0 秒後の落下速度は、4.03m/s となった。これは自由落下の速度である 19.6m/s とはかなり異なった値であり、グラフから、ダイバーの落下速度は、ある一定の値に収束することが分かるが、この速度を終端速度という。